

DOI: 10.12731/2227-930X-2024-14-3-245

УДК 531.8



Научная статья | Транспортные и транспортно-технологические системы

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В АВТОМОБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Т.В. Аветисян, Я.Е. Львович, А.П. Преображенский

Цель исследования - понять стабильность автомобильных систем путем изучения параметрических колебаний. Функцию Матье используют для вычисления собственных значений системы, которые имеют решающее значение для определения поведения системы с течением времени. **Результаты** исследования выявляют зону резонанса системы и предоставляют алгоритм вычисления собственных значений функций Матье. Результаты этого исследования могут быть применены при анализе различных транспортных систем для оценки их устойчивости. Эти знания могут быть использованы для повышения комфорта и эксплуатационных характеристик транспортных средств за счет минимизации воздействия параметрических колебаний. В исследовании делается **вывод** о том, что анализ параметрических колебаний в автомобильных системах может дать ценную информацию о стабильности системы. Для более глубокого анализа исследование предполагает, что численное интегрирование следует использовать, когда глубина модуляции невелика. Такой подход позволит получить более точное представление о поведении системы.

Ключевые слова: параметрическое колебание; автомобильная система; уравнение Матье; резонанс

Для цитирования. Аветисян Т.В., Львович Я.Е., Преображенский А.П. Исследование параметрических колебательных движений в автомобильной системе // International Journal of Advanced Studies. 2024. Т. 14, № 3. С. 7-22. DOI: 10.12731/2227-930X-2024-14-3-245

Original article | Transport and Transport-Technological Systems

INVESTIGATION OF PARAMETRIC OSCILLATORY MOVEMENTS IN THE AUTOMOTIVE SYSTEM

T.V. Avetisyan, Y.E. Lvovich, A.P. Preobrazhensky

*The **aim** of the study is to understand the stability of automotive systems by studying parametric oscillations. The Mathieu function is used to calculate the eigenvalues of the system, which are crucial for determining the behavior of the system over time. The **results** of the study reveal the resonance zone of the system and provide an algorithm for calculating the eigenvalues of Mathieu functions. The results of this study can be applied to the analysis of various transport systems to assess their stability. This knowledge can be used to improve the comfort and performance of vehicles by minimizing the impact of parametric fluctuations. The study **concludes** that the analysis of parametric fluctuations in automotive systems can provide valuable information about the stability of the system. For a deeper analysis, the study suggests that numerical integration should be used when the modulation depth is low. This approach will allow you to get a more accurate understanding of the management of the system.*

Keywords: *parametric oscillation; automotive system; Mathieu equation; resonance*

For citation. *Avetisyan T.V., Lvovich Y.E., Preobrazhensky A.P. Investigation of Parametric Oscillatory Movements in the Automotive System. International Journal of Advanced Studies, 2024, vol. 14, no. 3, pp. 7-22. DOI: 10.12731/2227-930X-2024-14-3-245*

Введение

В автомобильной системе можно колебательную систему, представить в виде совокупности определенного числа упруго связанных масс. Конкретное ее представление определяется конструктивными особенностями автомобилей.

Вибрации в двигателях достаточно часто обусловлены проявлением такого явления, как пропуски зажигания внутри одного или нескольких цилиндров. Если для одного или нескольких цилиндров не наблюдается процесс возгорания топливной смеси, тогда это будет негативным образом сказываться на мощности в целом двигателя. Как результат, возникает вибрирование (или «колебание») автомобиля в ходе его ускорения. Вследствие пропусков зажигания будут провоцироваться вибрации. Одной из возможных задач при этом может быть выяснение того, что было причиной в пропусках зажигания.

Достаточно распространенной среди причин исследователи отмечают обедненную смесь, внутри которой довольно мало топлива и, при этом, много воздуха. Как самая частая причина в нарушении подачи топлива указывается засорение в топливных фильтрах, неисправности внутри топливных насосов или регуляторов, кроме этого, есть загрязнение или выход из строя топливных форсунок.

Различные колебания и вибрации кузова будут наблюдаться в ходе движения автомобиля. С точки зрения того, как они будут воздействовать на организм людей, могут быть разные варианты. Есть колебания до 900...1100 колебаний в минуту, что соответствует низкой частоте. Они будут восприниматься людьми в виде отдельных циклов изменений нагрузок или положений. Вибрации соответствуют колебаниям при более высоких частотах. Они будут восприниматься слитно.

Диапазон, который соответствует от 80 до 150 колебаний в минуту, будет соответствовать частотам колебаний кузова на амортизаторах. Диапазон, который соответствует от 360 до 900 колебаний в минуту будет соответствовать колебаниям осей между амортизаторами и землей. Диапазон, который соответствует от 1000 до 4200 колебаний в минуту будет соответствовать частотам колебаний элементов двигателя, трансмиссии и кузова.

Комфортабельность автомобилей должна быть повышена. Для этого необходимо обеспечить, чтобы амплитуда колебаний была

уменьшена. В ряде случаев удается достичь, чтобы амплитуды колебаний были меньше, чем 35...40 мм. При этом колебания головы за счет амортизационной способности человеческого организма полным образом будут устранены. Большие амплитуды ведут к проявлению колебаний головы. С точки зрения физиологии это обуславливает неприятные ощущения и быструю усталость.

Среди значимых факторов, которые будут оказывать влияние на организм человека, можно отметить частоту колебаний. Исследователями было подтверждено, что при числе колебаний, которое будет достигать менее 50 колебаний в минуту ведет к тому, что «морская болезнь» достаточно часто проявляется у пассажиров. Могут ощущаться резкие толчки. Они проявляются, когда будет превышение 130 колебаний в минуту. В зависимости от того, какие частоты колебаний, на людей разные параметры в колебательных процессах при колебаниях могут оказывать свое воздействие. Есть зависимость их энергетические затрат и нервных нагрузок.

Ощущения, как показывает анализ, в основном пропорциональны ускорениям в ходе колебаний. Низкочастотный диапазон колебаний автомобильной системы относится к нескольким колебаниям в минуту. Вертикальные ускорения рассматриваются в виде достаточного распространенного измерителя в автомобильной технике. Их определяют по характерным точкам колебательных автомобильных систем.

Целью данной работы является рассмотрение параметрических колебаний в автомобильной системе.

Описание параметрического резонанса

Дадим описание параметрического резонанса на примере линейной автомобильной системы. Используется следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu \cos \Omega t)x = 0. \quad (1)$$

В нем ω_0 является частотой собственных колебаний.

Уравнение (1) – это уравнение Матье. Решение уравнения Матье записывается в следующем виде

$$x = c_1 \chi(t) \exp(\lambda t) + c_2 \chi(-t) \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

Здесь $\chi(t)$ являются ограниченными функциями. В выражении λ – это характеристический показатель. При рассмотрении его вещественной части можно говорить о поведении решения с точки зрения возрастания или убывания.

Специальные функции– функции Матье позволяют описать (2) при произвольном μ .

Известно, что уравнение Матье (1) может иметь такие периодические решения,

$$\begin{aligned} {}_c C_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} \cos(2n + p)z, \\ {}_s C_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} \sin(2n + p)z, \quad (p = 0, 1), \end{aligned} \quad (3)$$

которые называются функциями Матье [1, 2].

В ходе исследований были созданы алгоритм и машинная программа, позволяющая проводить расчет функций Матье и их нулей.

Представим, что в уравнение (1) можно осуществить подстановку любого из рядов (3). Также приравняем нулю коэффициенты при $\cos(2nz)$, $\cos((2n + 1)z)$, $\sin(2nz)$, $\sin((2n + 1)z)$ с учетом $n = 0, 1, 2, \dots$. В таких случаях приходим к рекуррентным соотношениям [3]:

$$aA_0 - qA_2 = 0;$$

$$(a - 4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) = 0; \quad (4)$$

$$(a - 4r^2)A_{2r} - q(A_{2r+2} + A_{2r-2}) = 0;$$

$$(a - 1 - q)A_1 - qA_3 = 0;$$

$$[a - (2r + 1)^2]A_{2r+1} - q(A_{2r+3} + A_{2r-1}) = 0; \quad (5)$$

$$(a - 1 + q)B_1 - qB_3 = 0;$$

$$[a - (2r + 1)^2]B_{2r+1} - q(B_{2r+3} + B_{2r-1}) = 0; \quad (6)$$

$$(a - 4)B_2 - qB_4 = 0;$$

$$(a - 4r^2)B_{2r} - q(B_{2r+2} + B_{2r-2}) = 0 \quad (7)$$

Для определения коэффициентов разложения $A_{2r}, A_{2r+1}, B_{2r}, B_{2r+1}$ в (3.23) используются условия нормировки [3]

$$\begin{aligned}
 2[A_0]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} [A_{2r}]^2 &= 1, \\
 \sum_{r=0}^{\infty} [A_{2r+1}]^2 &= 1, \\
 \sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+1}]^2 &= 1, \\
 \sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+2}]^2 &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Собственные значения

Собственные значения, при которых уравнение (1) имеет решения ${}_c C_{2m}(z, q)$, обычно обозначаются $a_{2m}(q)$. Для расчета собственных значений $a_{2m}(q)$ [4, 5] удобно воспользоваться трансцендентными уравнениями, соответствующими ветвям $p_{2m} = p_{2m}(q)$ кривой $p = p(q)$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{-2q^2}{4 - a_0 - \frac{q^2}{16 - a_0 - \frac{q^2}{36 - a_0 - \dots - \frac{q^2}{4k^2 - a_0 - \dots}}}} \\
 a_2 &= 4 + \frac{2q^2}{a_2 - \frac{q^2}{16 - a_2 - \frac{q^2}{36 - a_2 - \frac{q^2}{64 - a_2 - \dots - \frac{q^2}{4k^2 - a_2 - \dots}}}} \\
 a_{2m} &= (2m)^2 + \frac{q^2}{a_{2m} - (2m - 2)^2 - \frac{q^2}{a_{2m} - (2m - 4)^2 - \dots - \frac{q^2}{a_{2m} - 4 - \frac{2q^2}{a_{2m}}}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{q^2}{(2m+2)^2 - a_{2m} - \frac{q^2}{(2m+4)^2 - a_{2m} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k)^2 - a_{2m} - \dots}} \quad (9)$$

Выше рассматривалась функция Матье с четным индексом ${}_c C_{2m}(z, q)$. По аналогии можно найти условия существования решений вида ${}_c C_{2m+1}(z, q)$, ${}_s C_{2m+1}(z, q)$, ${}_s C_{2m+2}(z, q)$ и собственные значения $a_{2m+1}(q)$, $b_{2m+2}(q)$, $b_{2m+1}(q)$, Трансцендентные уравнения, которые относятся к собственным значениям уравнения Матье a_{2m+1} , b_{2m+2} , b_{2m+1} имеют следующий вид [6].

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 + q - \frac{q^2}{9 - a_1 - \frac{q^2}{25 - a_1 - \frac{q^2}{49 - a_1 - \dots - \frac{q^2}{(2k+1)^2 - a_1 - \dots}}}}; \\
 a_{2m+1} &= (2m+1)^2 + \frac{q^2}{a_{2m+1} - (2m-1)^2 - \frac{q^2}{a_{2m+1} - (2m-3)^2 - \dots - \frac{q^2}{a_{2m+1} - 1 - q}}}; \\
 &= \frac{q^2}{(2m+3)^2 - a_{2m+1} - \frac{q^2}{(2m+5)^2 - a_{2m+1} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k+1)^2 - a_{2m+1} - \dots}} \quad (10) \\
 b_2 &= 4 - \frac{q^2}{16 - b_2 - \frac{q^2}{36 - b_2 - \frac{q^2}{64 - b_2 - \dots - \frac{q^2}{(2k+2)^2 - b_2 - \dots}}}};
 \end{aligned}$$

$$b_{2m+2} = (2m+2)^2 + \frac{q^2}{b_{2m+2} - (2n)^2 - \frac{q^2}{b_{2m} - (2m-2)^2 - \dots - \frac{q^2}{b_{2m+2} - 4}} - \frac{q^2}{(2m+4)^2 - b_{2m+2} - \frac{q^2}{(2m+6)^2 - b_{2m+2} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k+2)^2 - b_{2m+2} - \dots}} \quad (11)$$

$$b_1 = 1 - q - \frac{q^2}{9 - b_1 - \frac{q^2}{25 - b_1 - \frac{q^2}{49 - b_1 - \dots - \frac{q^2}{(2k+1)^2 - b_1 - \dots}}}$$

$$b_{2m+1} = (2m+1)^2 + \frac{q^2}{b_{2m+1} - (2m-1)^2 - \frac{q^2}{b_{2m+1} - (2m-3)^2 - \dots - \frac{q^2}{b_{2m+1} - 1 + q}} - \frac{q^2}{(2m+3)^2 - b_{2m+1} - \frac{q^2}{(2m+5)^2 - b_{2m+1} - \dots - \frac{q^2}{(2m+2k+1)^2 - b_{2m+1} - \dots}} \quad (12)$$

При малых значениях параметра q ($q < 1$) для расчета функций Матье используются их разложения по этому параметру [7].

$${}_c C_0(z, q) = 2^{-1/2} \left[1 - \frac{q}{2} \cos(2z) + q^2 \left(\frac{\cos(4z)}{32} - \frac{1}{16} \right) - q^3 \left(\frac{\cos(6z)}{1152} - \frac{11 \cos(2z)}{128} \right) + \dots \right],$$

$${}_c C_1(z, q) = \cos(z) - \frac{q}{8} \cos(3z) + q^2 \left(\frac{\cos(5z)}{192} - \frac{\cos(3z)}{64} - \frac{\cos(z)}{128} \right) - q^3 \left(\frac{\cos(7z)}{9216} - \frac{\cos(5z)}{1152} - \frac{\cos(3z)}{3072} + \frac{\cos(z)}{512} \right) + \dots$$

$${}_c C_2(z, q) = \cos(2z) - q \left(\frac{\cos(4z)}{12} - \frac{1}{4} \right) + q^2 \left(\frac{\cos(6z)}{384} - \frac{19 \cos(2z)}{288} \right) + \dots, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
{}_s C_1(z, q) &= \sin(z) - \frac{q}{8} \sin(3z) + q^2 \left(\frac{\sin(5z)}{192} + \frac{\sin(3z)}{64} - \frac{\sin(z)}{128} \right) - \\
&\quad - q^3 \left(\frac{\sin(7z)}{9216} + \frac{\sin(5z)}{1152} - \frac{\sin(3z)}{3072} - \frac{\sin(z)}{512} \right) + \dots \\
{}_c C_r(z, q) \Big\} &= \cos(rz - p\pi/2) - q \left\{ \frac{\cos[(r+2)z - p\pi/2]}{4(r+1)} - \frac{\cos[(r-2)z - p\pi/2]}{4(r-1)} \right\} + \\
{}_s C_r(z, q) \Big\} &+ q^2 \left\{ \frac{\cos[(r+4)z - p\pi/2]}{32(r+1)(r+2)} + \frac{\cos[(r-4)z - p\pi/2]}{32(r-1)(r-2)} - \frac{\cos[rz - p\pi/2]}{32} \left[\frac{2(r^2+1)}{(r^2-1)^2} \right] \right\} + \dots,
\end{aligned}$$

где $p = 0$ для ${}_c C_r(z, q)$, $p = 1$ для ${}_s C_r(z, q)$ ($r > 3$).

Решение уравнения

Задача (1) может быть решена на основе простых функций, в предположении, что $\mu \ll 1$. В случае, когда $\mu=0$ решение представляется в таком виде

$$x(t) = x_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (14)$$

В этой связи можно предполагать, что при $\mu \neq 0$ и достаточно малом, решение будет не сильным образом отличающимся от известного. Вычисление поправок можно проводить на основе рекуррентного подхода [8]. Последующие приближения базируются на предыдущих. Предлагается применять теорию возмущений. Решение (1) представляется в таком виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots + \mu^n x^{(n)}(t). \quad (15)$$

Требуется обеспечить асимптотическую сходимость этого ряда. Решение, представляемое в виде (15), имеет смысл, если поправки $x^{(i)}$ для нулевого приближения x_0 не будут нарастать с течением времени. Осуществим подстановку (15) в (1), проведем группировку членов, которые соответствуют одинаковым степеням μ . Тогда приходим к уравнению (16).

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x + \mu [\ddot{x}^{(1)}(t) + \omega_0^2 x^{(1)}(t) - x_0 \omega_0^2 \cos \Omega t] + \\
&\quad + \mu^2 [\ddot{x}^{(2)}(t) + \omega_0^2 x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) \omega_0^2 \cos \Omega t] + \dots \\
&\quad \dots + \mu^n [\ddot{x}^{(n)}(t) + \omega_0^2 x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t) \omega_0^2 \cos \Omega t] \equiv 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

Видно, что выражения внутри скобок разные. Они не могут скомпенсировать друг друга. В таком случае должно быть равенство нулю любой из скобок. После записи всех выражений будет рекуррентная система уравнений. При ее решении можно определить i -е приближение. Видно, из (16), что уравнение относится к гармоническому осциллятору. На этот осциллятор будет воздействовать внешняя сила, как набор гармоник. Рассматривается выражение, на основе которого можно определить поправку первого приближения $x^{(1)}$

$$\ddot{x}^{(1)}(t) + \omega_0^2 x^{(1)}(t) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos \Omega t, \quad (17)$$

то есть

$$\ddot{x}^{(1)}(t) + \omega_0^2 x^{(1)}(t) = \frac{\omega_0^2 A}{2} \{ \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi] + \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi] \}. \quad (18)$$

Для частот $(\omega_0 - \Omega)$ и $(\omega_0 + \Omega)$ есть две гармонических составляющих, соответствующих вынуждающей силе. Требуется, чтобы такие гармоники не резонировали с колебаниями на частоте ω_0 . При этом нет роста со временем поправки $x^{(1)}(t)$. Тогда $|\omega_0 - \Omega| \neq \omega_0$ и $\Omega \neq 2\omega_0$. Будет наблюдаться секулярный рост во времени поправки $x^{(1)}(t)$, когда наблюдается резонанс. Поэтому решение типа $x(t) = x_0(t) + \mu x^{(1)}(t)$ следует рассматривать для времен порядка нескольких периодов. Будем рассматривать не как постоянные величины Амплитуду и фазу в главной части решения. Они считаются медленно меняющимися функций времени. Тогда будет зависимость $A = A(\mu t)$, $\varphi = \varphi(\mu t)$.

Проведем рассмотрение резонансного случая $\Omega = 2\omega_0 + \mu\delta$, здесь $\mu\delta = \delta'$ является малой расстройкой. В таком случае (1) будет принимать вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu \omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \delta')t] x. \quad (19)$$

Решение для него такое

$$x(t) = A(\mu t) \cos[(\omega_0 + \delta'/2)t] + B(\mu t) \sin[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \mu x^{(1)}(t). \quad (20)$$

При этом $A(\mu t)$ и $B(\mu t)$ являются функциями времени. Они будут медленно меняться по сравнению с функциями $\cos(\dots)$ и $\sin(\dots)$. Определять такие функции будем из того условия, что не будет роста в слагаемом $x^{(1)}(t)$. Сделаем подстановку (20) в (19)

и обеспечим равенство коэффициентов μ , которые относятся к первой степени. При этом, исходя из того, что $\dot{A} \sim \mu A$ и $\dot{B} \sim \mu B$, мы придем к уравнению по $x^{(1)}(t)$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \omega_0 [2\dot{A} + \delta' B - \frac{\mu \omega_0}{2} B] \sin[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \omega_0 [-2\dot{B} + \delta' A + \frac{\mu \omega_0}{2} A] \cos[(\omega_0 + \delta'/2)t]. \tag{21}$$

Потребуем, чтобы было отсутствие в правой части резонансных слагаемых. С этой целью используем такие равенства

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{2} (\delta - \frac{\omega_0}{2}) B, \dot{B} = -\frac{\mu}{2} (\delta + \frac{\omega_0}{2}) A. \tag{22}$$

В результате преобразований мы получаем уравнения для медленно меняющихся амплитуд. Решение подобной системы уравнений мы будем искать в виде $A, B \sim \exp(\lambda t)$. В ходе рассмотрения формируем характеристическое уравнение для того, чтобы найти λ

$$\lambda^2 = -\frac{\mu^2}{4} (\delta^2 - \frac{\omega_0^2}{4}). \tag{23}$$

Если расстройка достаточно мала, тогда можно увидеть, что

$$-\frac{\omega_0}{2} < \delta < \frac{\omega_0}{2}. \tag{24}$$

При этом будет происходить нарастание амплитуд. Внутри автомобильной системы будет происходить реализация параметрической неустойчивости. В неравенстве (24) мы стремимся к определению зоны основного резонанса. Основываясь на преобразованиях на основе уравнения границы в ней определяются соответствующим образом

$$\frac{\mu}{4} = \pm (\frac{2\omega_0}{\Omega} - 1). \tag{25}$$

Здесь мы учитывали, что

$$\frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\omega_0}{2\omega_0 + \mu\delta} \approx \frac{1}{2} (1 - \frac{\mu\delta}{2\omega_0}). \tag{26}$$

Это выражение с учетом (24) записывается как $\frac{\omega_0}{\Omega} \approx \frac{1}{2} (1 \pm \frac{\mu}{4})$. На рис. 1 дана иллюстрация границ зоны неустойчивости, которая связана с основным резонансом.

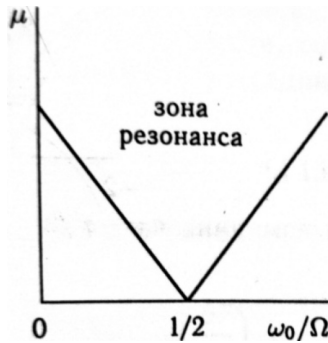


Рис. 1. Иллюстрация границ зоны неустойчивости

При аналогичном подходе в параметрическом резонансе при $\Omega = \omega_0 + \mu d$ мы можем определить границы области второй зоны. Приходим к выражению

$$-\frac{5\mu\omega_0}{24} < \delta < \frac{\mu\omega_0}{24}. \quad (27)$$

Из него вытекает, что спектральная величина второй зоны, связанной с параметрической неустойчивостью, будет заметным образом меньше по сравнению с первой зоной ($d \sim \mu$).

В случае, когда на практике наблюдается большая глубина модуляции μ , тогда правая часть уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu x \omega_0^2 \cos \Omega t$ не будет являться малой. При поиске решения нельзя использовать асимптотический метод решения. В таких случаях необходимо использовать численное интегрирование [9].

В тех случаях, когда глубина модуляции не считается малой, тогда уравнение Матье с точки зрения общности результатов мы можем представить в виде

$$\ddot{x} + (a - 2q \cos 2\tau)x = 0. \quad (28)$$

При этом a и q рассматриваются в виде определенных постоянных (которые не обязательно являются положительными), $\tau = \omega_0 t$ – это безразмерное время. На рис. 2 дана иллюстрация результатов интегрирования уравнения Матье (28), когда используются разные комбинации a и q .

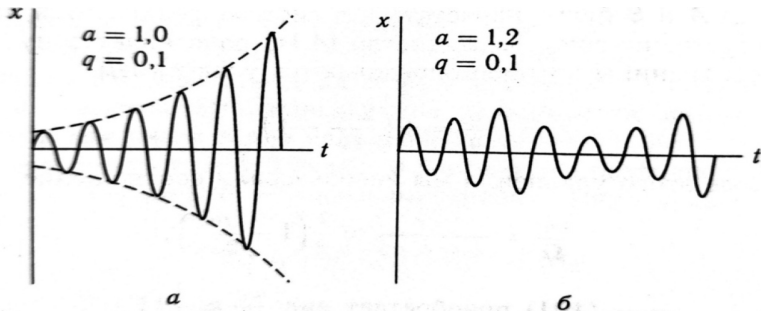


Рис. 2. Иллюстрация результатов интегрирования уравнения Маттье

При том, что одинаков параметр системы q , колебания характеризуются разным видом вследствие различия в параметре a . Для первого случая колебания являются возрастающими, система будет неустойчивой. Для второго случая колебания рассматриваются как ограниченные, тогда система будет устойчивой.

Заключение

В работе проведен анализ параметрических колебаний в автомобильной системе. Проведено решение уравнения Маттье. Показана зона резонанса. Приведен алгоритм расчета собственных значений функций Маттье. Полученные результаты могут быть использованы при анализе различных транспортных систем с точки зрения их устойчивости.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Список литературы

1. Нурутдинов Р.Р., Шайхутдинов Р.Я., Зарипов Д.С., Гареева Г.А. Разработка приложения для контроля качества деталей на брак // International Journal of Advanced Studies. 2023. Т. 13. № 1. С. 77-89. <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2023-13-1-77-89>
2. Терентьев А.В., Евтюков С.С., Пировов Я.Е. Аналитическая модель организации грузовых перевозок в сложной транспортной системе

- мегаполиса // *International Journal of Advanced Studies*. 2023. Т. 13. № 1. С. 24-41. <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2023-13-1-24-41>
3. Покровская О.Д., Мороз Ю.А., Меликов М.И. Трансформация рынка транспортных услуг в России в условиях международных санкций // *International Journal of Advanced Studies*. 2023. Т. 13. № 1. С. 197-211. <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2023-13-1-197-211>
 4. Мельников А.Р., Мельникова И.П., Мельникова М.А. О переходе от простой к комплексной модели организации экспедиторских и логистических услуг // *International Journal of Advanced Studies*. 2023. Т. 13. № 1-2. С. 36-42.
 5. Львович Я.Е., Питолин А.В., Сапожников Г.П. Многометодный подход к моделированию сложных систем на основе анализа мониторинговой информации // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019. Т. 7. № 2 (25). С. 301-310.
 6. Козлова Д.Н., Преображенский А.П., Шунулина В.В. Исследование колебаний в двухмассовой механической системе // *Вестник воронежского института высоких технологий*. 2023. №3(46). С. 8-9.
 7. Козлова Д.Н., Преображенский А.П., Шунулина В.В. Исследование гармонического осциллятора под действием неперiodической силы // *Вестник воронежского ин-та выс-х техн-й*. 2023. №2(45). С. 6-9.
 8. Шунулина В.В., Козлова Д.Н., Преображенский А.П. Исследование колебаний маятника // *Вестник воронежского института высоких технологий*. 2023. №1(44). С. 19-21.
 9. Козлова Д.Н., Преображенский А.П., Шунулина В.В. Исследование колебаний физического маятника // *Вестник воронежского института высоких технологий*. 2022. №3(42). С. 24-27.

References

1. Nurutdinov R.R., Shaykhutdinov R.Ya., Zaripov D.S., Gareeva G.A. Development of an application for quality control of parts for rejects. *International Journal of Advanced Studies*, 2023, vol. 13, no. 1, pp. 77-89. <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2023-13-1-77-89>
2. Terentyev A.V., Evtuykov S.S., Pirogov Y.E. Analytical model of freight transportation organization in a complex transport system of a mega-

- polis. *International Journal of Advanced Studies*, 2023, vol. 13, no. 1, pp. 24-41. <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2023-13-1-24-41>
3. Pokrovskaya O.D., Moroz Y.A., Melikov M.I. Transformation of the transportation services market in Russia under international sanctions. *International Journal of Advanced Studies*, 2023, vol. 13, no. 1, pp. 197-211. <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2023-13-1-197-211>
 4. Melnikov A.R., Melnikova I.P., Melnikova M.A. On the transition from simple to complex model of forwarding and logistics services organization. *International Journal of Advanced Studies*, 2023, vol. 13, no. 1-2, pp. 36-42.
 5. Lvovich Ya.E., Pitolin A.V., Sapozhnikov G.P. Multi-method approach to modeling complex systems based on the analysis of monitoring information. *Modeling, optimization and information technologies*, 2019, vol. 7, no. 2 (25), pp. 301-310.
 6. Kozlova D.N., Preobrazhenskiy A.P., Shunulina V.V. Investigation of vibrations in a two-mass mechanical system. *Bulletin of Voronezh Institute of High Technologies*, 2023, no. 3(46), pp. 8-9.
 7. Kozlova D.N., Preobrazhenskiy A.P., Shunulina V.V. Investigation of the harmonic oscillator under the action of a non-periodic force. *Bulletin of the Voronezh Institute of High Technologies*, 2023, no. 2(45), pp. 6-9.
 8. Shunulina V.V., Kozlova D.N., Preobrazhenskiy A.P. Investigation of the pendulum oscillations. *Bulletin of Voronezh Institute of High Technologies*, 2023, no. 1(44), pp. 19-21.
 9. Kozlova D.N., Preobrazhenskiy A.P., Shunulina V.V. Investigation of the physical pendulum oscillations. *Bulletin of Voronezh Institute of High Technologies*, 2022, no. 3(42), pp. 24-27.

ДАНИЕ ОБ АВТОРАХ

Аветисян Татьяна Владимировна, преподаватель

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Колледж Воронежского института высоких технологий»

ул. Ленина, 73а, г. Воронеж, 394043, Российская Федерация
vtatyana_avetisyan@mail.ru

Львович Яков Евсеевич, доктор технических наук, профессор
*Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования «Воронежский институт высоких тех-
нологий»*
ул. Ленина, 73а, г. Воронеж, 394043, Российская Федерация
office@yandex.ru

Преображенский Андрей Петрович, доктор технических наук,
профессор
*Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования «Воронежский институт высоких тех-
нологий»*
ул. Ленина, 73а, г. Воронеж, 394043, Российская Федерация
Komkovvvt@yandex.ru

DATA ABOUT THE AUTHORS

Tatiana V. Avetisyan, Teacher

*College of the Voronezh Institute of High Technologies
73a, Lenin Str., Voronezh, 394043, Russian Federation
vtatyana_avetisyan@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3559-6070>*

Yakov Y. Lvovich, Doctor of Technical Sciences, Professor

*Voronezh Institute of High Technologies
73a, Lenin Str., Voronezh, 394043, Russian Federation
office@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7051-3763>*

Andrey P. Preobrazhenskiy, Doctor of Technical Sciences, Professor

*Voronezh Institute of High Technologies
73a, Lenin Str., Voronezh, 394043, Russian Federation
Komkovvvt@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6911-8053>*

Поступила 13.02.2024

После рецензирования 20.03.2024

Принята 05.04.2024

Received 13.02.2024

Revised 20.03.2024

Accepted 05.04.2024