DOI: 10.12731/2227-930X-2021-11-1-34-44
УДК 656

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКО ОПРЕДЕЛЁННЫМИ ТАРИФАМИ

Агапова Е.Г., Попова Т.М.

Большое практическое значение имеют оптимизационные задачи, содержащие в своей постановке неопределённость. Например, оптимизационная задача доставки мелкопартионных грузов в условиях крупного города методом нечетких с-средних. Этот метод предназначен для разбиения множества элементов на нечеткие подмножества. Что в свою очередь дает возможность распределения периферийных пунктов по районам, исходя из дополнительных условий. Применение аппарата теории нечетких множеств упрощает постановку и описание задач. В данной статье рассматривается построение оптимального плана транспортной задачи, в которой удельные затраты на перевозку представляют собой нечеткие множества. На модельном примере построен план перевозок в условиях изменяющего тарифа. Решение данной задачи позволяет разработать наиболее рациональные пути и способы транспортирования товаров, устранить чрезмерно дальние, встречные, повторные перевозки. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий и фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д. Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза.

Цель *– нахождение оптимального решения транспортной задачи с нечетко определенными тарифами.*

Метод или методология проведения работы: *в статье использовались методы линейного программирования, а также элементы теории нечетких множеств.*

Результаты: *получен алгоритм нахождения оптимального решения транспортной задачи с нечетко определенными тарифами.*

Область применения результатов: *полученные результаты целесообразно применять при планировании транспортных перевозок, а также при решении некоторых экономических задач.*

Ключевые слова: *транспортная задача; нечеткие множества; оптимальный план*

SOLUTION OF THE TRANSPORT TASK WITH FUZZY DEFINED TARIFFS

Agapova E.G., Popova T.M.

Optimization tasks containing uncertainty in their formulation have great importance. For example, the optimization problem of delivering fine-flow cargo in the conditions of a large city by the method of fuzzy with-medium. This method is designed to break the set of elements on fuzzy subsets. Which in turn makes it possible to distribute peripheral points in areas, based on additional conditions. The use of the apparatus of the theory of fuzzy sets simplifies the formulation and description of the tasks. This article discusses the construction of the optimal plan of the transport problem, in which the specific costs of transportation are fuzzy sets. The model example built a plan for transportation in a changing tariff. The solution to this task allows you to develop the most rational ways and ways to transport goods, eliminate excessively distant, counter, re-transport. All this reduces the time promotion of goods, reduces the costs of enterprises and firms related to the implementation of the supply processes with raw materials, materials, fuel, equipment, etc. The algorithm and methods of solving the transport task can be used in solving some economic tasks that do not have anything in common with transportation of cargo.

Purpose. *Finding the optimal solution of the transport task with fuzzy specific tariffs.*

Methodology *in article use linear programming methods, elements of the theory of fuzzy sets.*

Results: *Obtained an algorithm for finding the optimal solution of the transport problem with unclearly defined tariffs.*

Practical implications *it is expedient to apply the received results for transport planning, for solving some economic problems.*

Keywords: *transport task; fuzzy sets; optimal plan*

Многочисленные задачи принятия решений, в том числе и задачи о транспортных перевозках, сводятся к вычислительной схеме, типичной для задач математического программирования. При решении таких задач различают две ситуации. Первая: параметры целевой функции задачи и ограничений – детерминированные величины. Для решения этих задач используются хорошо известные оптимизационные методы [2, 6]. Например, при специфике дорожного движения в городе с учетом потери времени на заторы на дорогах. Предложен оптимальный маршрут торгового представителя, который задает последовательность всех торговых точек и описывает оптимальные пути следования от одной торговой точки к другой [1]. Во второй ситуации исходная информация содержит элементы неопределенности, параметры которых являются случайными величинами с известными законами распределения, объединены в класс задач стохастического программирования [8, 13]. На практике достаточно часто возникают ситуации, когда в результате недостаточного объема выборки исходных данных получение эмпирической плотности распределения случайных параметров задачи не представляется возможным. Другой подход состоит в описании неточных элементов задачи в терминах нечетких множеств [3-5], [7], [9], [11], [15-18]. При этом получают задачу нечеткого математического программирования. Применение аппарата теории нечетких множеств упрощает постановку и описание задач, но делает невозможным непосредственное использование хорошо изученных и отработанных детерминированных методов. Таким образом, возникает проблема разработки специфических методов математического программирования для решения задач, параметры которых заданы нечетко [10].

Рассмотрим задачу о перевозке продукции от m поставщиков однородной продукции с известными запасами этой продукции A_i, $i = 1,...,m$ и n потребителей этой продукции с заданными объемами потребления B_i, $j = 1,...,n$. Удельные затраты на перевозку представляют собой нечеткие множества $\overline{C}_{ij}$.

Пусть сумма объемов запасов продукции равна объему потребления всех потребителей (задача называется закрытого типа), рассмотрим задачу определения значения вектора действительных переменных в $x_{ij} \geq 0, i = 1,...,n, j = 1,...,m$, при условиях системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, \; \sum_{i=1}^{nm} x_{ij} = B_j, \qquad i = 1,..,m, \qquad j = 1,\dots,n,$$

обеспечивающих наиболее эффективное значение Fuzzy-множества целевой функции

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{C}_{ij} x_{ij} \to \min,$$

где $\overline{C}_{ij} \geq 0$ – нечеткие множества.

В качестве Fuzzy-множеств можно рассматривать компактные множества с функциями принадлежности самого общего вида $0 \leq \mu_{\overline{C}}(\overline{C}_{ij}) \leq 1$. В частности, можно рассматривать функции принадлежности, представленные двумя функциями $\mu_{L(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$ и $\mu_{R(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$ или тремя – $\mu_{L(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$, $\mu_{R(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$ и $\mu_{G(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$. Функция $\mu_{L(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$ – монотонно неубывающая на отрезке [0,1], функция $\mu_{R(\overline{C})}(\overline{C}_{ij})$ – монотонно невозрастающая на отрезке [0,1], а функция $\mu_{G(\overline{C})}(\overline{C}_{ij}) = const = 1$ в противном случае – открытой.

Алгоритм решения такой транспортной задачи ничем не отличается от алгоритма с определенными тарифами и состоит из трех этапов: построение опорного плана перевозок, проверка его на оптимальность и улучшение плана с оптимизацией целевой функции.

При построении опорного плана, например методом минимальных элементов, поставка $x_{ij} = \min \; \{A_i, B_j\}$, с учетом уже произведенных поставок, то выбор соответствующей поставки осуществляется на основе перевода нечеткого тарифа в детерминированный, при этом, расчет детерминированного эквивалента для каждого нечеткого множества коэффициента целевой функции $\overline{C}_{ij}$ в виде $S(\overline{C}_{ij})$ по формулам

$$S(\overline{C}) = \sum_{p=0}^{P} w_p L_p,$$

где $w_p \geq 0$ – весовые коэффициенты сечений нечетких множеств, или $L_p = 0{,}5\left(C_p^1 + C_p^2\right)$ – координаты средних точек соответствующих сечений нечетких множеств $(\overline{C}, \mu_{\overline{c}}(C))$ – $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p, ..., \alpha_p$, $C_0^1, C_1^1, ..., C_p^1, ..., C_p^1$ и $C_0^2, C_1^2, ..., C_p^2, ..., C_p^2$ – соответственно координаты левых и правых крайних точек (координаты абсцисс всех этих сечений), после чего все шаги получения опорного решения ничем не отличаются от последовательности вычислений в случае детерминированных значений c_{ij}.

Пусть $\overline{x}_{ij} \geq 0$ – детерминированные значения объесов перевозок, полученные в некотором допустимом базовом решении. Fuzzy-множество, определяющее значение целевой функции полученного базисного решения, определяется по формуле:

$$\mu_{\overline{F}(\overline{Z})}(\overline{F}(\overline{Z}_p)) = \max_{(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, ..., \overline{x}_{ij}, ..., \overline{x}_{mn}) \in \widetilde{Q}(\overline{Z}_p)} \min \{\mu_{\overline{C}}(\overline{C}_{11}), \mu_{\overline{C}}(\overline{C}_{12}), ..., \mu_{\overline{C}}(\overline{C}_{ij}), ..., \mu_{\overline{C}}(\overline{C}_{nm})\},$$

где

$$\widetilde{Q}(\overline{Z}_p) = \{(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, ..., \overline{x}_{ij}, ..., \overline{x}_{mn}) \mid \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{C}_{ij}\overline{x}_{ij} = \overline{Z}_p; \overline{x}_{ij} > 0, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\};$$

$\overline{Z}_p \in [\overline{Z}^{\min}, \overline{Z}^{\max}]$ – диапазон возможных детерминированных значений суммарных затрат, связанных с перевозкой грузов [13 -14].

Для функций принадлежности удельных затрат доставки грузов трапециевидного и треугольного вида выражение $\mu_{\overline{F}(\overline{Z})}(\overline{F}(\overline{Z}_p))$ вычисляется по явным формулам

$$\mu_{\overline{F}(\overline{Z})}(\overline{F}(\overline{Z}_p)) \to (\overline{A}, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{B})$$

или

$$\mu_{\overline{F}(\overline{Z})}(\overline{F}(\overline{Z}_p)) \to (\overline{A}, \overline{M}, \overline{B}),$$

где

$$\overline{A} = \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a(\overline{C}_{ij})\overline{x}_{ij} \mid \overline{x}_{ij} > 0, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\};$$

$$\overline{B} = \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b(\overline{C}_{ij})\overline{x}_{ij} \mid \overline{x}_{ij} > 0, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\};$$

$$\overline{M}_k = \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_k(\overline{C}_{ij})\overline{x}_{ij} \mid \overline{x}_{ij} > 0, i = 1,...,n, j = 1,...,m\}, k = 1,2;$$

$$\overline{M} = \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(\overline{C}_{ij})\overline{x}_{ij} \mid \overline{x}_{ij} > 0, i = 1,...,n, j = 1,...,m\}.$$

Этап проверки плана на оптимальность и при необходимости улучшение плана проводятся на основе метода потенциалов с детерминированными коэффициентами.

Рассмотрим модельный пример построения плана перевозок в условиях изменяющего тарифа.

Стоимости перевозки единицы объема грузов заданы Fuzzy-числами с функциями принадлежности треугольно вида $\mu_X(A) = (a, m, b)$ и представлены в клетках таблицы 1.

Таблица 1.

Исходные данные задачи

	1	2	3	4	A_i
1	(1,5,3)	(3,4,2)	(3,7,4)	(1,2,3)	10
2	(3,6,2)	(1,6,3)	(1,8,3)	(1,4,3)	80
3	(2,4,3)	(3,4,4)	(1,5,2)	(1,6,2)	20
B_j	40	15	42	13	110

Требуемые объемы поставок потребителям и запасы поставщиков заданы соответственно в последней строке и последнем столбце таблицы 1. Необходимо найти наиболее эффективный план перевозок, обеспечивающий наилучшее значение Fuzzy-множества, определяющего суммарные затраты на выполнение плана перевозок. Переопределяем тарифы перевозок по соответствующим формулам, получаем детерминированную задачу:

Таблица 2.

Вычисленные значения

	1	2	3	4	A_i
1	5,67	3,67	7,33	2,23	10
2	5,67	6,14	8,66	4,26	80
3	4,13	4,33	5,13	6,13	20
B_j	40	15	42	13	110

Опорный план, которой

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 15 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

с целевой функцией F = 737,6. Нетрудно убедится, что план является не оптимальным и его можно улучшить за 9 шагов. Оптимальный план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 40 & 5 & 22 & 13 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

с усредненным значением целевой функции F = 642,7.

Решение данной задачи позволяет разработать наиболее рациональные пути и способы транспортирования товаров, устранить чрезмерно дальние, встречные, повторные перевозки. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий и фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д. Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза.

Список литературы

1. Агапова Е.Г., Попова Т.М. Задачи коммивояжера при оптимизации маршрутного пути // International Journal of Advanced Studies. 2019. Т. 9, № 4. С. 7-10.
2. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного вида / Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. М.: Физматгиз, Наука, 1993. 384 с.
3. Зак Ю.А. Fuzzy – регрессионные модели прогнозирования затрат времени и стоимости грузовых автомобильных перевозок // Логистика сегодня. 2015. № 3. С. 162-172.
4. Зак Ю.А. Критерии и методы сравнения нечетких множеств // Системные исследования и информационные технологии. 2013. № 3. С. 58-68.

5. Зак Ю.А. Принятие решений в условиях нечетких и размытых данных: Fuzzy – технологии. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 352 с.
6. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 256 с.
7. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой информации. М.: Наука, 1981. 264 с.
8. Пигнастый О. М. Стохастическая теория производственных систем. Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2007. 387 с.
9. Самойленко Н.И. Транспортные системы большой размерности: монография / Н. И. Самойленко, А. А. Кобец, под ред. Н. И. Самойленко. Х.: НТМТ, 2010. 212 с.
10. Холод Н.И. Пособие к решению задач по линейной алгебре и линейному программированию / под ред. В.И. Комлика. Минск: БГУ, 1971. 176 с.
11. Шведов А.С. Нечеткое математическое программирование: краткий обзор // Проблемы управления. 2017. №3. С. 2-10. http://www.mathnet.ru/links/954fc36fb6bc032ee7b939f0f503ad70/pu1024.pdf
12. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. Задачи и методы стохастического программирования. М.: Сов. радио, 1974. 392 с.
13. Ясенин А.В. Нечеткое математическое программирование. Калинин: Калин. гос. ун-т, 1986. 60 с.
14. Allahviranloo F. Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function / F. Allahviranloo, H. Lotfi, M.K. Kiani, L. Alizadeh // Applied Mathematical Sciences. 2008. P. 19-32.
15. Bellman R.E. Decision-Making in a Fuzzy Environment / R.E. Bellman, L.A. Zadeh // Management Science. 1970. Vol. 17, Issue 4. P. B-141–B-164. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.b141
16. Raskin L., Sira O. Метод решения нечетких задач математического программирования // Восточно-европейский журнал передовых технологий, ЧП «Технологический центр», Украинская государственная академия железнодорожного транспорта (Харьков). 2016. Т. 5, № 4(83). С. 23-28.

17. Szmidt E. Distances between intuitionistic fuzzy sets / E. Szmidt, J. Kacprzyk // Fuzzy Sets and Systems. 2000. Vol. 114, Issue 3. P. 505–518. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(98)00244-9
18. Yang M.-S. Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input–output data / M.-S. Yang, T.-S. Lin // Fuzzy Sets and Systems. 2002. Vol. 126, Issue 3. P. 389–399. https://doi.org/10.1016/s0165-114(01)00066-5

References

1. Agapova E.G., Popova T.M. Zadachi kommivoyazhera pri optimizatsii marshrutnogo puti [Challenges of the traveler in the optimization of the route way]. *International Journal of Advanced Studies*, 2019, vol. 9, no. 4, pp. 7-10.
2. Gol'shteyn E.G., Yudin D.B. Zadachi lineynogo programmirovaniya transportnogo vida [Tasks of linear programming of the transport type]. M.: Fizmatgiz, Nauka, 1993, 384 p.
3. Zak Yu.A. Fuzzy – regressionnye modeli prognozirovaniya zatrat vremeni i stoimosti gruzovykh avtomobil'nykh perevozok [Fuzzy – regression models for predicting the cost of time and cost of freight road transport]. *Logistika segodnya,* 2015, no. 3, pp. 162-172.
4. Zak Yu.A. Kriterii i metody sravneniya nechetkikh mnozhestv [Criteria and methods of comparing fuzzy sets]. *Sistemnye issledovaniya i informatsionnye tekhnologii,* 2013, no. 3, pp. 58-68.
5. Zak Yu.A. *Prinyatie resheniy v usloviyakh nechetkikh i razmytykh dannykh: Fuzzy – tekhnologii* [Decision making in conditions of fuzzy and blurred data: Fuzzy - Technologies]. M.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2013, 352 p.
6. Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. M.: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1980, 256 p.
7. Orlovskiy S.A. *Problemy prinyatiya resheniy pri nechetkoy informatsii* [Decision making problems in fuzzy information]. M.: Nauka, 1981, 264 p.
8. Pignastyy O.M. *Stokhasticheskaya teoriya proizvodstvennykh system* [Stochastic theory of production systems]. Kh.: KhNU im. V. N. Karazina, 2007, 387 p.

9. Samoylenko N.I. *Transportnye sistemy bol'shoy razmernosti: monografiya* [Large dimension transport systems: monograph] / N.I. Samoylenko, A.A. Kobets, ed. N. I. Samoylenko. Kh.: NTMT, 2010, 212 p.
10. Kholod N. I. *Posobie k resheniyu zadach po lineynoy algebre i lineynomu programmirovaniyu* [Manual for solving problems on linear algebra and linear programming] / ed. V.I. Komlik. Minsk: BGU, 1971, 176 p.
11. Shvedov A.S. Nechetkoe matematicheskoe programmirovanie: kratkiy obzor [Fuzzy Mathematical Programming: Short Overview]. *Problemy upravleniya,* 2017, no. 3, pp. 2-10. http://www.mathnet.ru/links/954fc36fb6bc032ee7b939f0f503ad70/pu1024.pdf
12. Yudin D.B. Matematicheskie metody upravleniya v usloviyakh nepolnoy informatsii. Zadachi i metody stokhasticheskogo programmirovaniya [Mathematical management methods in terms of incomplete information. Tasks and methods of stochastic programming]. M.: Sov. radio, 1974, 392 p.
13. Yasenin A.V. *Nechetkoe matematicheskoe programmirovanie* [Fuzzy mathematical programming]. Kalinin: Kalin. gos. un-t, 1986, 60 p.
14. Allahviranloo F. Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function / F. Allahviranloo, H. Lotfi, M.K. Kiani, L. Alizadeh. *Applied Mathematical Sciences,* 2008, pp. 19-32.
15. Bellman R.E. Decision-Making in a Fuzzy Environment / R. E. Bellman, L. A. Zadeh. *Management Science,* 1970, vol. 17, no. 4, pp. B-141–B-164. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.b141
16. Raskin L., Sira O. Metod resheniya nechetkikh zadach matematicheskogo programmirovaniya [Method for solving fuzzy problems of mathematical programming]. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*, 2016, vol. 5, no. 4(83), pp. 23-28.
17. Szmidt E. Distances between intuitionistic fuzzy sets / E. Szmidt, J. Kacprzyk. *Fuzzy Sets and Systems,* 2000, vol. 114, no. 3, pp. 505–518. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(98)00244-9
18. Yang M.-S. Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input–output data / M.-S. Yang, T.-S. Lin. *Fuzzy Sets and Systems,* 2002, vol. 126, no. 3, pp. 389–399. https://doi.org/10.1016/s0165-114(01)00066-5

ДАННЫЕ ОБ АВТОРАХ

Агапова Елена Григорьевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Тихоокеанский государственный университет
ул. Тихоокеанская, 136, г. Хабаровск, 680035, Российская Федерация
000614@pnu.edu.ru

Попова Татьяна Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент
Тихоокеанский государственный университет
ул. Тихоокеанская, 136, г. Хабаровск, 680035, Российская Федерация
000511@pnu.edu.ru

DATA ABOUT THE AUTHORS

Elena G. Agapova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Pacific National University
136, Tikhookeanskaya Str., Khabarovsk, 680035, Russian Federation
000614@pnu.edu.ru
ORCID: 0000-0002-2824-6294

Tatyana M. Popova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Pacific National University
136, Tikhookeanskaya Str., Khabarovsk, 680035, Russian Federation
000511@pnu.edu.ru
ORCID: 0000-0003-4759-9500